ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2018, № 2

УДК 004.42:510.69

М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Україна
вул. Володимирська, 60, м. Київ, 01601

7-ЗНАЧНІ ЛОГІКИ ТА ЛОГІКИ ЗАГАЛЬНИХ НЕДЕТЕРМІНОВАНИХ ПРЕДИКАТІВ

M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Ukraine
60, Volodymyrska st., Kyiv, 01601

7-VALUES LOGICS AND LOGICS OF GENERAL NON-DETERMINISTIC PREDICATES

Досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – логіки загальних недетермінованих предикатів, або *GND*-предикатів. Виділено різновиди *GND*-предикатів, описано їх композиційні алгебри. Показано зв'язок *GND*-предикатів із *7*-значними тотальними детермінованими предикатами – *TD*7-предикатами. Виділено алгебру істиннісних значень *TD*7-предикатів, описано усі її підалгебри. Досліджено індукування алгебрами істиннісних значень відповідних алгебр *GND*-предикатів. Це засвідчує особливу роль логіки *TD*7-предикатів серед 7-значних логік. Підтвердженням такої ролі є ґенерування логіки *TD*7-предикатів із сильної 3-значної логіки Кліні.

Ключові слова: логіка, алгебра, недетермінований предикат, багатозначна логіка

A new class of program-oriented logical formalisms – a logic of general non-deterministic predicates, or *GND*-predicates – is investigated. Different types of *GND*-predicates are identified, their compositional algebras are described. The connection of *GND*-predicates with 7-valued total deterministic predicates, or *TD*7-predicates, is demonstrated. The algebra of truth values of *TD*7-predicates is specified; all its subalgebras are described. Such algebras induce subalgebras of corresponding *GND*-predicates; their properties are investigated. This demonstrates the special role of the logic of *TD*7-predicates among the 7-valued logics. The confirmation of this role is the generation of the logic of *TD*7 predicates from the strong 3-valued Kleene logic.

Keywords: logic, predicate, non-deterministic predicate, many-valued logic

Вступ

Розширення сфери застосування інформаційних технологій та їх розвиток виводять на перший план задачу створення надійних і ефективних програмних систем. В основі цих систем лежить апарат математичної логіки (див., напр., [1]). Зазвичай це класична логіка предикатів та базовані на ній спеціальні логіки (модальні, темпоральні, епістемічні, алгоритмічні, програмні тощо). Проте класична логіка має низку принципових обмежень. Найістотнішим є те, що вона не враховує широкого використання в програмних системах та системах штучного інтелекту часткових недетермінованих відображень над неповними даними. Тому проблема побудови нових, програмно-орієнтованих логічних формалізмів набуває особливої актуальності. Такими формалізмами є композиційно-номінативні логіки (КНЛ) квазіарних предикатів (див., напр., [2–4]). Передумовою виникнення КНЛ стала необхідність посилення можливостей класичної логіки для розв'язання нових задач інформатики й програмування.

Метою пропонованої роботи є дослідження нових класів програмно-орієнтованих логік – КНЛ загальних недетермінованих квазіарних предикатів, або *GND*-предикатів. Ці логіки відображають такі властивості програм, як недетермінізм, частковість, нефіксовану арність. Логіки недетермінованих квазіарних предикатів є подальшим узагальненням логік часткових та недетермінованих предикатів [5–8], зокрема, часткових неоднозначних предикатів реляційного типу – *R*-предикатів [3].

Семантичні властивості *GND*-предикатів вивчались, зокрема, в роботах [9, 10]. Виділено різновиди *GND*-предикатів, досліджено властивості їх композицій, описано композиційні алгебри та мови логіки *GND*-предикатів. Встановлено зв'язок

GND-предикатів із *7*-значними тотальними детермінованими предикатами. Подальше дослідження такого зв'язку наведено в даній роботі.

Останнім часом багатозначні логіки набувають особливої ролі в інформатиці, програмуванні, штучному інтелекті. Використання багатозначних логік доцільне для адекватної формалізації складних програмних систем. При цьому найбільш дослідженими є 3-значні логіки (найперше, 3-значна логіка Лукасевича, сильна та слабка 3-значні логіки Кліні [11]), із 4-значних особливої уваги заслуговує логіка Белнапа [12], із 5-значних виділимо *EU*-логіку [13]. При цьому сильна 3-значна логіка Кліні та логіка Белнапа посідають (див. [3]) особливе місце серед 3-значних логік та 4-значних логік. Це означає наступне: алгебри *P*-предикатів (часткових однозначних) та *T*-предикатів (тотальних неоднозначних) традиційної 2-значної логіки ізоморфні алгебрі сильної 3-значної логіки Кліні; алгебра *R*-предикатів (часткових неоднозначних) 2-значної логіки ізоморфна алгебрі 3-значної логіки Белнапа.

GND-предикати можна моделювати як *TD*7-предикати – 7-значні тотальні детерміновані предикати, що засвідчує особливу роль логіки *TD*7-предикатів серед 7-значних логік. Підтвердженням такої особливості є отриманий у даній роботі результат про те, що 7-значну логіку *TD*7-предикатів можна отримати із сильної 3-значної логіки Кліні за допомогою конструкції повного образу. Зазначимо, що сильна 3-значна логіка Кліні, яка посідає особливе місце серед 3-значних логік, теж отримується (див. [14]) за допомогою конструкції повного образу із класичної 2-значної логіки. Це ще раз підтверджує особливий статус логіки *TD*7-предикатів серед 7-значних логік.

Поняття, які в цій роботі не визначені, будемо тлумачити у значенні [3, 9, 10].

Різновиди *GND*-предикатів

Сутність поняття недетермінованого предиката можна пояснити так. Уявімо собі складний предикат-механізм, утворений із базових предикатів-механізмів за допомогою композицій. Такий складний предикат може містити багато екземплярів одного і того ж базового предиката. Через нечіткість та неповну визначеність деяких даних базовий предикат може функціонувати недетермінованим чином: на одному і тому ж даному одні його екземпляри можуть приймати значення *T*, інші – значення *F*, а деякі його екземпляри можуть не приймати жодного значення. Зрозуміло, що для кожного екземпляра недетермінованого предиката має бути принаймні одна з цих можливостей.

Таким чином, недетермінований квазіарний предикат $P: {}^VA \to \{T, F\}$ при застосуванні до даного $d \in {}^VA$ може приймати значення *T*, приймати значення *F*, а може і не приймати жодного значення (бути невизначеним). Для кожного $d \in {}^VA$ має бути принаймні одна з цих ситуацій, що загалом дає 7 можливостей для прийняття значення при застосуванні до певного даного. Зауважимо, що така ситуація неможлива для предикатів реляційного типу: там *або* приймається значення *T* чи *F* (можливо, навіть обидва), *або* не приймається жодного.

Загальні недетерміновані квазіарні предикати називаємо *GND-предикатами*.

Клас *V-A*-квазіарних *GND*-предикатів позначимо $PrG_{V\text{–}A}$. Кожний *GND*-предикат $P: {}^VA \to \{T, F\}$ однозначно описуємо за допомогою 3-х множин – областей *істинності* *T*(*P*), *хибності* *F*(*P*), *невизначеності* $\perp(P)$:

- $T(P) = \{d \mid P$ може приймати на d значення $T\} = \{d \in {}^VA \mid T \in P[d]\}$;
- $F(P) = \{d \mid P$ може приймати на d значення $F\} = \{d \in {}^VA \mid F \in P[d]\}$;
- $\perp(P) = \{d \mid P$ може бути невизначеним на $d\}\} = \{d \in {}^VA \mid \perp \in P[d]\}$.

Кожне $d \in {}^VA$ має бути принаймні в одній з цих множин, тому загальна умова:

$$F(P) \cup T(P) \cup \perp(P) = {}^VA. \quad \text{(G)}$$

Множину $T(P) \cap F(P)$ назвемо *областю амбівалентності* *GND*-предиката *P*.

Області істинності, хибності, невизначеності, амбівалентності будемо називати *T*-областю, *F*-областю, *U*-областю (а також $\perp$-областю), *A*-областю.

Множину $T(P) \cap F(P) \cap \bot(P)$ назвемо областю цілковитої недетермінованості, або областю амбівалентності з невизначеністю, або *AU*-областю.

Для однозначного задання *V*-*A*-квазіарного *R*-предиката *P* достатньо множин *T*(*P*) та *F*(*P*). Для *R*-предикатів немає потреби окремо вводити множину ⊥(*P*), адже вона однозначно визначається через *T*(*P*) та *F*(*P*):

$$\bot(P) = \overline{T(P) \cup F(P)} \qquad \text{(R)}$$

R-предикати можна трактувати як *GND*-предикати, для яких вірна умова (R).

Зауважимо, що умова (G) рівносильна умові $\overline{T(P) \cup F(P)} \subseteq \bot(P)$, граничним випадком якої є умова (R) для *R*-предикатів.

Накладаючи обмеження на області істинності, хибності й невизначеності, виділимо низку класів *GND*-предикатів. При цьому має виконуватись умова (G).

V-*A*-квазіарний *GND*-предикат *P*:

- *однозначний*, або *SG*-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$;
- *тотальний*, або *TG*-предикат, якщо $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$;
- *виконуваний*, якщо $T(P) \neq \varnothing$;
- *неспростовний*, якщо $F(P) = \varnothing$;
- *тотально істинний*, якщо $T(P) = {}^V\!A$;
- *тотально хибний*, якщо $F(P) = {}^V\!A$;
- *тотально невизначений*, або *TIG*-предикат, якщо $\bot(P) = {}^V\!A$;
- *тотально амбівалентний*, або *TAmG*-предикат, якщо $T(P) = F(P) = {}^V\!A$.

TIG-предикати дуже подібні до *R*-предикатів: кожний *TIG*-предикат цілком визначається *тільки* *T*-областю та *F*-областю.

Існують *SG*-предикати і *TG*-предикати, які не є *R*-предикатами, та навпаки.

Поєднуючи (де це можливо) наведені вище умови з умовою (R), отримуємо низку класів *R*-предикатів. *GND*-предикат *P*:

- *однозначний R-предикат*, або *P*-предикат, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$ та (R);
- *тотальний R-предикат*, або *T*-предикат, якщо $\bot(P) = \varnothing$;
- умова (G) тоді дає $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$, тому кожний *T*-предикат є *TG*-предикатом;
- *TS-предикат*, якщо $T(P) \cap F(P) = \varnothing$ та $\bot(P) = \varnothing$; тоді (G) дає $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$;
- *неспростовний R-предикат*, якщо $F(P) = \varnothing$ та $\bot(P) = \overline{T(P)}$;
- *невиконуваний R-предикат*, якщо $T(P) = \varnothing$ та $\bot(P) = \overline{F(P)}$;
- *тотально хибний R-предикат*, якщо $F(P) = {}^V\!A$ та $\bot(P) = \varnothing$;
- *тотально істинний R-предикат*, якщо $T(P) = {}^V\!A$ та $\bot(P) = \varnothing$.

Неспростовні *R*-предикати та невиконувані *R*-предикати є *P*-предикатами.

Поєднання відповідних умов дає, зокрема, такі класи *GND*-предикатів:

- *TSG*-предикати (умови $T(P) \cap F(P) = \varnothing$ та $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$);
- *STIG*-предикати (умови $\bot(P) = {}^V\!A$ та $T(P) \cap F(P) = \varnothing$);
- *TTIG*-предикати (умови $\bot(P) = {}^V\!A$ та $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$);
- *TSTIG*-предикати (умови $\bot(P) = {}^V\!A$, $T(P) \cap F(P) = \varnothing$ та $T(P) \cup F(P) = {}^V\!A$).

Можна виділити 7 константних *V*-*A*-квазіарних *GND*-предикатів.

- *P* тотожно істинний (позн. T): умова $F(P) = \bot(P) = \varnothing$ та $T(P) = {}^V\!A$;
- *P* тотожно хибний (позн. F): умова $T(P) = \bot(P) = \varnothing$ та $F(P) = {}^V\!A$;
- *P* тотально істинно-невизначений (позн. $T_{\uparrow}$): умова $T(P) = \bot(P) = {}^V\!A$ та $F(P) = \varnothing$;
- *P* тотально хибно-невизначений (позн. $F_{\uparrow}$): умова $F(P) = \bot(P) = {}^V\!A$ та $T(P) = \varnothing$;
- *P* тотожно невизначений (позн. ⊥): умова $T(P) = F(P) = \varnothing$ та $\bot(P) = {}^V\!A$;
- *P* тотально амбівалентний (позн. ϒ): умова $T(P) = F(P) = {}^V\!A$ та $\bot(P) = \varnothing$;
- *P* тотально недетермінований (позн. $\Upsilon_{\uparrow}$): умова $T(P) = F(P) = \bot(P) = {}^V\!A$.

Зрозуміло, що предикати T, F, ⊥, ϒ є константними *R*-предикатами.

Увівши до розгляду *U*-область і *A*-область, задамо спеціальні класи *GND*-предикатів, які не є *R*-предикатами, окрім вироджених випадків. *GND*-предикат *P*:

– *AU*-предикат, якщо $T(P)\cap F(P)\subseteq\perp(P)$;

– *UA*-предикат, якщо $\perp(P)\subseteq T(P)\cap F(P)$;

– $U_{=}A$-предикат, якщо $\perp(P) = T(P)\cap F(P)$;

– $nU_{=}A$-предикат, якщо $\overline{\perp(P)} = T(P)\cap F(P)$;

– *AnU*-предикат, якщо $T(P)\cap F(P)\subseteq\overline{\perp(P)}$ (що рівносильно $T(P)\cap F(P)\cap\perp(P)=\varnothing$);

– *ImG*-предикат (with imprecise values), якщо $\overline{\perp(P)}\subseteq T(P)\cap F(P)$;

– *UAU*-предикат, якщо $\perp(P)=(\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)})\cup(T(P)\cap F(P))$;

– *RAU*-предикат, якщо $\perp(P)\subseteq(\overline{T(P)}\cap\overline{F(P)})\cup(T(P)\cap F(P))$.

Теорема 1.

1. Неоднозначні *AU*-предикати не є *R*-предикатами.
2. Кожний *SG*-предикат є *AU*-предикатом та є *AnU*-предикатом.
3. При $\perp(P)=\varnothing$ *AU*-предикати та $U_{=}A$-предикати стають *TS*-предикатами.
4. Кожний *UA*-предикат тотальний; кожний $U_{=}A$-предикат тотальний.
5. Тотальні *R*-предикати (*T*-предикати) є *UA*-предикатами.
6. *UA*-предикати та $U_{=}A$-предикати з умовою $\perp(P)\neq\varnothing$ не є *R*-предикатами.
7. Кожний *R*-предикат є *AnU*-предикатом.
8. Для *R*-предикатів *ImG*-умова дає вироджений клас із умовою $T(P) = F(P)$.
9. Кожний *TIG*-предикат є *ImG*-предикатом.
10. Кожний *TAmG*-предикат є тотальним *ImG*-предикатом.
11. Кожний *UAU*-предикат є *AU*-предикатом та є *RAU*-предикатом.

Нехай $*$ – назва класу *GND*-предикатів (напр., *SG*, *TIG*). Тоді відповідний клас *V*-*A*-квазіарних $*$ -предикатів позначаємо $Pr*_{V\text{–}A}$ (напр., $PrSG_{V\text{–}A}$, $PrTIG_{V\text{–}A}$).

Якщо *V* та *A* маємо на увазі, то позначаємо просто $Pr*$ (напр., *PrSG*, *PrTIG*).

Теорема 2.

1. Поєднання *UA*, $U_{=}A$ із $T(P)\cup F(P) = {}^{V}A$ дає ті ж самі класи тотальних предикатів:

$PrUA = PrTUA$; $PrU_{=}A = PrTU_{=}A$.

2. Поєднання *AU*, *AnU*, *ImG*, $nU_{=}A$, *UA*, $U_{=}A$ із $T(P)\cap F(P) = \varnothing$ дає такі класи:

$PrSAU = PrSAnU = PrSG$;

$PrSImG = PrSnU_{=}A = PrSTIG$;

$PrSUA = PrSU_{=}A = PrTS$.

3. Поєднання умов *AU*, *ImG*, *AnU*, $nU_{=}A$ із $T(P)\cup F(P) = {}^{V}A$ дає нові класи тотальних предикатів: *PrTAU*, *PrTImG*, *PrTAnU*, $PrTnU_{=}A$.

Композиційні алгебри *GND*-предикатів

Для *GND*-предикатів *базові* пропозиційні композиції (логічні зв'язки) $\vee$ та $\neg$ задаємо через області істинності, хибності, невизначеності предикатів $\neg P$ та $P\vee Q$:

$T(\neg P) = F(P)$, $F(\neg P) = T(P)$,

$\perp(\neg P) = \perp(P)$;

$T(P\vee Q) = T(P)\cup T(Q)$,

$F(P\vee Q) = F(P)\cap F(Q)$,

$\perp(P\vee Q) = (F(P)\cap\perp(Q))\cup$ $\cup(\perp(P)\cap F(Q))\cup(\perp(P)\cap\perp(Q))$.

Пропозиційні композиції $\to$ та & є *похідними*, вони задаються через $\vee$ та $\neg$:

$P\to Q = \neg P\vee Q$ та $P\&Q = \neg(\neg P\vee Q)$.

Пропозиційну композицію & можна подати так:

$T(P\&Q) = T(P)\cap T(Q)$,

$F(P\&Q) = F(P)\cup F(Q)$,

$\perp(P\&Q) = (T(P)\cap\perp(Q))\cup$ $\cup(\perp(P)\cap T(Q))\cup(\perp(P)\cap\perp(Q))$.

Властивості *GND*-предикатів на пропозиційному рівні описано в [9, 10]. Зокрема, для *GND*-предикатів маємо такі закони традиційної логіки:

1. Комутативність $\vee$ та &:

$P\vee Q = Q\vee P$ та $P\&Q = Q\&P$;

2. Асоціативність $\vee$ та &:

$(P\vee Q)\vee R = P\vee(Q\vee R)$ та

$(P\&Q)\&R = P\&(Q\&R)$;

3. Зняття подвійного заперечення:

$\neg\neg P = P$;

4. Контрапозиція:

$P\to Q = \neg Q\to\neg P$;

5. Ідемпотентність $\vee$ та &:

$P = P \vee P$ та $P = P \& P$;

6. Закони де Моргана:

$\neg(P \vee Q) = \neg P \& \neg Q$ та

$\neg(P \& Q) = \neg P \vee \neg Q$.

Характерною особливістю *GND*-предикатів є те, що збіжність областей істинності та хибності *не означає* збіжності їх областей невизначеності.

Приклад 1.

Маємо

$T(P \& Q \vee P) = T((P \vee Q) \& P) = T(P)$,

$F(P \& Q \vee P) = F((P \vee Q) \& P) = F(P)$;

водночас

$\perp(P \& Q \vee P) = \perp((P \vee Q) \& P) =$

$= \perp(P) \cup (F(P) \cap T(P) \cap \perp(Q))$.

Це можна трактувати так, що при ускладненні опису предиката зростає невизначеність його функціонування (наростає ентропія опису). При переході від простого опису P до складнішого із залученням Q до опису P, до області невизначеності $\perp(P)$ додається компонента $F(P) \cap T(P) \cap \perp(Q)$, яка може бути $\neq \varnothing$.

Отже, в класі *R*-предикатів збігаються P, $(P \vee Q) \& P$ та $P \& Q \vee P$, водночас в класі *GND*-предикатів $(P \vee Q) \& P$ та $P \& Q \vee P$ збігаються, проте вони не збігаються із P.

Приклад 2.

$\perp((P \& R) \vee (Q \& R)) = \perp((P \vee Q) \& R) \cup$

$\cup ((\perp(P) \cup \perp(Q)) \cap F(R) \cap T(R))$.

Приклад 3. Візьмемо $d \in {}^V\!A$ таке: $d \in \perp(Q)$; $d \notin \perp(P)$, $d \notin F(P)$; $d \notin \perp(R)$, $d \in F(R)$, $d \in T(R)$. Тоді $d \in \perp((P \& R) \vee (Q \& R))$ та $d \notin \perp((P \vee Q) \& R)$.

Приклади 1–3 засвідчують, що для *GND*-предикатів *не виконуються* такі важливі закони традиційної логіки:

- закони поглинання для $\vee$ та &;
- закони дистрибутивності для $\vee$ та &.

R-предикати можна трактувати як *GND*-предикати із умовою (R). Водночас пропозиційні композиції *GND*-предикатів виводять за межі *R*-предикатів.

Приклад 4.

Нехай *R*-предикат $\tilde{P}$ дуальний до *R*-предиката P. Тоді $P \vee \tilde{P}$ та $P \& \tilde{P}$ вже не є *R*-предикатами.

Для *GND*-предикатів композицію реномінації $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}} : PrG_{V-A} \to PrG_{V-A}$ задаємо традиційно, так, як і для *R*-предикатів: $\mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(P)[d] = P[\mathrm{r}_{\bar{x}}^{\bar{v}}(d)]$ для кожного $d \in {}^V\!A$;

Базову композицію квантифікації $\exists x : PrG_{V-A} \to PrG_{V-A}$ для *GND*-предикатів задаємо через області істинності, хибності та невизначеності предиката $\exists xP$:

$T(\exists xP) = \{d \in {}^V\!A \mid d \nabla x \mapsto a \in T(P)$ для деякого $a \in A\}$,

$F(\exists xP) = \{d \in {}^V\!A \mid d \nabla x \mapsto a \in F(P)$ для всіх $a \in A\}$,

$\perp(\exists xP) = \{d \in {}^V\!A \mid$
$d \nabla x \mapsto a \in \perp(P) \cup F(P)$ для всіх $a \in A$
та $d \nabla x \mapsto b \in \perp(P)$ для деякого $b \in A\}$.

Композиція $\forall x$ є похідною, через $\exists x$ та $\neg$ її подаємо так: $\forall xP = \neg \exists x \neg P$.

Основні властивості композицій реномінації та квантифікації для *GND*-предикатів такі ж як для *R*-предикатів Специфічні особливості композицій квантифікації *GND*-предикатів пов'язані з наявністю відносно незалежної $\perp$-області.

Таким чином, побудовано наступні композиційні алгебри *GND*-предикатів:

– пропозиційна алгебра

$APG_{V\text{–}A} = (PrG_{V\text{–}A}, \{\neg, \vee\})$;

– реномінативна алгебра

$ARG_{V\text{–}A} = (PrG_{V\text{–}A}, \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}\})$;

– чиста першопорядкова алгебра

$AQG_{V\text{–}A} = (PrG_{V\text{–}A}, \{\neg, \vee, \mathrm{R}_{\bar{x}}^{\bar{v}}, \exists x\})$.

Для певного класу $*$ *GND*-предикатів (напр., *SG*-предикатів) відповідну композиційну предикатну алгебру пропозиційного рівня позначаємо $AP*_{V\text{–}A}$ (напр., $APSG_{V\text{–}A}$), реномінативного рівня – $AR*_{V\text{–}A}$ (напр., $ARSG_{V\text{–}A}$), кванторного рівня (чисту першопорядкову алгебру) – $AQ*_{V\text{–}A}$ (напр., $AQSG_{V\text{–}A}$). Якщо V та A маємо на увазі, то позначаємо просто $AP*$, $AR*$, $AQ*$ (напр., *APSG*, *ARSG*, *AQSG*).

Алгебра істиннісних значень *TD*7-предикатів та її підалгебри

Множиною значень $P[d]$, які *GND*-предикат P може прийняти на даному $d \in {}^V\!A$, може бути одна з множин $\{\varnothing\}$, $\{T\}$, $\{F\}$,

ISSN 1561-5359. Штучний інтелект, 2018, № 2

$\{T, F\}$, $\{T, \varnothing\}$, $\{F, \varnothing\}$, $\{T, F, \varnothing\}$. Ці множини далі позначаємо $\uparrow$, T, F, TF, $T\uparrow$, $F\uparrow$, $TF\uparrow$. Тому *GND*-предикати можна моделювати як *TD*7-*предикати* – 7-значні тотальні детерміновані предикати. Множиною істиннісних значень *TD*7-предикатів є множина $TV_7 = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$.

Клас *V-A*-квазіарних *TD*7-предикатів позначимо $PrTD7_{V\text{–}A}$.

Для опису зв’язку *GND*-предикатів та *TD*7-предикатів розглянемо алгебри істиннісних значень *TD*7-предикатів та композиційні алгебри *TD*7-предикатів.

Пропозиційні композиції *TD*7-предикатів $\neg_*$, $\vee_*$ та $\&_*$ можна задавати традиційним чином – за допомогою таблиць істинності. Ці композиції задамо так:

P	T	F	$\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
$\neg_* P$	F	T	$\uparrow$	TF	$F\uparrow$	$T\uparrow$	$TF\uparrow$

$\vee_*$	T	F	$\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
T	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	$\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
$\uparrow$	T	$\uparrow$	$\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$\uparrow$	$T\uparrow$
TF	T	TF	$T\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$
$T\uparrow$	T	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$	$T\uparrow$
$F\uparrow$	T	$F\uparrow$	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
$TF\uparrow$	T	$TF\uparrow$	$T\uparrow$	$TF\uparrow$	$T\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$

$\&_*$	T	F	$\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
T	T	F	$\uparrow$	TF	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
F	F	F	F	F	F	F	F
$\uparrow$	$\uparrow$	F	$\uparrow$	$F\uparrow$	$\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
TF	TF	F	$F\uparrow$	TF	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
$T\uparrow$	$T\uparrow$	F	$\uparrow$	$TF\uparrow$	$T\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$
$F\uparrow$	$F\uparrow$	F	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$	$F\uparrow$
$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	F	$F\uparrow$	$TF\uparrow$	$TF\uparrow$	$F\uparrow$	$TF\uparrow$

Композиції $\neg_*$ та $\vee_*$ візьмемо як *базові* пропозиційні композиції *TD*7-предикатів.

Тоді композиція $\&_*$ є похідною, вона задається так: $P \&_* Q = \neg_*(\neg_* P \vee_* Q)$.

Також можна задати похідну композицію $\rightarrow_*$: $P \rightarrow_* Q = \neg_* P \vee_* Q$.

Множина TV_7 замкнена щодо $\neg_*$ та $\vee_*$, вона замкнена також щодо $\&_*$ та $\rightarrow_*$.

Алгебру $ATV_7 = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*\})$ назвемо *пропозиційною алгеброю істиннісних значень* *TD*7-предикатів.

Композиційну алгебру $ATD7_{V\text{–}A} = (PrTD7_{V\text{–}A}, \{\neg_*, \vee_*\})$, де $\{\neg_*, \vee_*\}$ – множина базових композицій, назвемо *пропозиційною алгеброю* *TD*7-предикатів.

Теорема 3. Для *GND*-предикатів маємо такі закони традиційної логіки:

1. Комутативність $\vee_*$ та $\&_*$:
   $P \vee_* Q = Q \vee_* Q$; $P \&_* Q = Q \&_* P$;
2. Асоціативність $\vee_*$ та $\&_*$:
   $(P \vee_* Q) \vee_* R = P \vee_* (Q \vee_* R)$;
   $(P \& Q) \& R = P \& (Q \& R)$;
3. Зняття подвійного заперечення:
   $\neg_* \neg_* P = P$;
4. Контрапозиція: $P \rightarrow_* Q = \neg Q \rightarrow_* \neg P$;
5. Ідемпотентність $\vee_*$ та $\&_*$:
   $P = P \vee_* P$; $P = P \&_* P$;
6. Закони де Моргана:
   $\neg_*(P \vee_* Q) = (\neg_* P) \&_* (\neg_* Q)$;
   $\neg_*(P \&_* Q) = (\neg_* P) \vee_* (\neg_* Q)$.

Приклад 5. Для *TD*7-предикатів невірні закони дистрибутивності Справді: $(\uparrow \vee_* T) \&_* TF = T \&_* TF = TF$, водночас $(\uparrow \&_* TF) \vee_* (T \&_* TF) = F\uparrow \vee_* TF = TF\uparrow$; $(\uparrow \&_* F) \vee_* TF = F \vee_* TF = TF$, водночас $(\uparrow \vee_* TF) \&_* (F \vee_* TF) = TF\uparrow \&_* TF = TF\uparrow$.

Приклад 6. Для *TD*7-предикатів невірні закони поглинання. Справді: $TF \vee_* (TF \&_* \uparrow) = TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow \neq TF$; $TF \&_* (TF \vee_* \uparrow) = TF \&_* T\uparrow = TF\uparrow \neq TF$.

Таким чином, у логіці *TD*7-предикатів, як і в логіці *GND*-предикатів, невірні закони дистрибутивності та закони поглинання для диз’юнкції та кон’юнкції.

Індукування алгебрами істиннісних значень алгебр *GND*-предикатів

Алгебра ATV_7 та її підалгебри індукують композиційні алгебри *GND*-предикатів на пропозиційному, реномінативному, чистому першопорядковому рівнях.

Зв'язок алгебри ATV_7 та алгебр $APG_{V–A}$, $ARG_{V–A}$, $AQG_{V–A}$ встановлюється так.

Наявність певного істиннісного значення υ в TV_7 означає, що існують предикат $P\in PrG_{V–A}$ та $d\in{}^{V}A$ такі, що $\upsilon\in P[d]$.

Кожна підалгебра алгебри ATV_7 індукує відповідну підалгебру алгебри $TD7$-предикатів $ATD7_{V–A}$. Далі кожна така підалгебра алгебри $ATD7_{V–A}$ індукує відповідну підалгебру в алгебрах GND-предикатів $APG_{V–A}$, $ARG_{V–A}$, $AQG_{V–A}$.

Для опису підалгебр ATV_7 виділено усі підмножини множини TV_7, замкнені щодо $\{\neg_*, \vee_*\}$:

– 6-елементні

$TV_{6_1} = \{\uparrow, T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$,

$TV_{6_2} = \{T, F, TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$;

– 5-елементні

$TV_{5_1} = \{\uparrow, T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$,

$TV_{5_2} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$,

$TV_{5_3} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow, TF, TF\uparrow\}$;

– 4-елементні

$TV_{4_1} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow\}$,

$TV_{4_2} = \{T, F, TF, TF\uparrow\}$,

$TV_{4_3} = \{TF, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$;

$TV_{4_4} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$;

– 3-елементні

$TV_{3_1} = \{T, F, \uparrow\}$, $TV_{3_2} = \{T, F, TF\}$,

$TV_{3_3} = \{T, F, TF\uparrow\}$,

$TV_{3_4} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\uparrow\}$, $TV_{3_5} = \{\uparrow, T\uparrow, F\uparrow\}$;

– 2-елементні

$TV_{2_1} = \{T, F\}$, $TV_{2_2} = \{T\uparrow, F\uparrow\}$,

$TV_{2_3} = \{TF, TF\uparrow\}$;

– 1-елементні

$TV_{1_1} = \{\uparrow\}$, $TV_{1_2} = \{TF\}$, $TV_{1_3} = \{TF\uparrow\}$.

Такі підмножини TV_{m_n} задають відповідні підалгебри ATV_{m_n} алгебри ATV_7. Ці підалгебри індукують відповідні підалгебри алгебри $ATD7_{V–A}$, які далі індукують підалгебри алгебри $AQG_{V–A}$:

– $AQAU_{V–A}$, $AQTG_{V–A}$;

– $AQSG_{V–A}$, $AQTAU_{V–A}$, $AQImG_{V–A}$;

– $AQTSG_{V–A}$, $AQUA_{V–A}$, $AQTImG_{V–A}$, $AQTIG_{V–A}$;

– $AQP_{V–A}$, $AQT_{V–A}$, $AQU_{=}A_{V–A}$, $AQTTIG_{V–A}$, $AQSTIG_{V–A}$;

– $AQTS_{V–A}$, $AQTSTIG_{V–A}$, $AQTAmG_{V–A}$;

– $AQ\bot_{V–A}$, $AQ\Upsilon_{V–A}$, $AQ\Upsilon\bot_{V–A}$.

Подібним чином отримуємо відповідні підалгебри алгебр $APG_{V–A}$ та $ARG_{V–A}$.

Накладаючи обмеження на області істинності, хибності й невизначеності, ми виділили низку класів GND-предикатів. Не всі ці класи замкнені щодо диз'юнкції GND-предикатів. Це клас R-предикатів і специфічні класи AnU, $TAnU$, RAU, $nU_{=}A$, UAU, $TnU_{=}A$-предикатів. Ці класи індуковано класами $TD7$-предикатів із такими множинами істиннісних значень:

– для AnU-предикатів:

$TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;

– для $TAnU$-предикатів:

$TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$;

– для RAU-предикатів:

$TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$;

– для R-предикатів:

$TV_R = \{T, F, \uparrow, TF\}$;

– для UAU-предикатів:

$TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$;

– для $nU_{=}A$-предикатів:

$TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$;

– для $TnU_{=}A$-предикатів:

$TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$.

Ці множини незамкнені щодо $\vee_*$, тому вони не утворюють підалгебр алгебри ATV_7. Для того щоб клас $TD7$-предикатів утворював алгебру, необхідно модифікувати $\vee_*$, що далі приведе до модифікації композиції $\vee$ відповідного класу GND-предикатів. Визначення композицій $\neg_*$ та $\neg$ змінювати недоцільно, водночас відповідно до модифікації $\vee_*$ та $\vee$ змінюються визначення похідних $\&_*$ та $\&$.

Для коректної модифікації $\vee_*$ та $\vee$ необхідне дотримання умови TFC.

Умова TFC (TF-correct) є необхідною умовою коректності («природності») логічних зв'язок предикатних алгебр.

Для $\vee$ та $\neg$ умова TFC задається так:

$$T(\alpha\vee\beta) = T(\alpha)\cup T(\beta),$$

$$F(\alpha\vee\beta) = F(\alpha)\cap F(\beta);$$

$$T(\neg\alpha) = F(\alpha),\ \ F(\neg\alpha) = T(\alpha).$$

Умова TFC виконується для алгебр $APG_{V–A}$, $ARG_{V–A}$, $AQG_{V–A}$, тому вона виконується для всіх її підалгебр, індукованих відповідними підалгебрами ATV_7.

При порушенні умови *TFC* алгебра істиннісних значень не індукує для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними пропозиційними композиціями.

Множини

$TV_{AnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$,
$TV_{TAnU} = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, TF\}$,
$TV_{nU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF\}$,
$TV_{TnU=A} = \{T\uparrow, F\uparrow, TF\}$

незамкнені щодо $\vee_*$: $TF \vee_* F\uparrow = TF\uparrow$.

Модифікуємо $\vee_*$ як $\vee_{AnU}$ так:

$TF \vee_{AnU} F\uparrow = TF$.

Множини TV_{AnU}, TV_{TAnU}, $TV_{nU=A}$, $TV_{TnU=A}$ вже замкнені щодо $\vee_{AnU}$.

Отримуємо алгебри істиннісних значень ATV_{AnU}, ATV_{TAnU}, $ATV_{nU=A}$, $ATV_{TnU=A}$ із операціями $\neg_*$, $\vee_{AnU}$.

Множини $TV_{D5} = \{T, F, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$, $TV_{UAU} = \{T, F, \uparrow, TF\uparrow\}$ незамкнені щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$; $TF\uparrow \vee_* \uparrow = T\uparrow$. *Єдиною* модифікацією $\vee_*$ за умови *TFC* є $\vee_{RAU}$:

$TF \vee_{RAU} \uparrow = T$ та $TF\uparrow \vee_{RAU} \uparrow = T$.

Тепер TV_{D5} та TV_{UAU} вже замкнені щодо $\vee_{RAU}$. Отримуємо алгебри істиннісних значень ATV_{RAU}, ATV_{UAU} із операціями $\neg_*$, $\vee_{RAU}$.

Множина $TV_R = \{\uparrow, T, F, TF\}$ незамкнена щодо $\vee_*$: $TF \vee_* \uparrow = T\uparrow$. Модифікуємо $\vee_*$ як диз'юнкцію 4-значної логіки Белнапа $\vee_B$: $TF \vee_B \uparrow = T$. Тоді TV_R вже замкнена щодо $\vee_B$. Маємо алгебру істиннісних значень ATV_R із операціями $\neg_*$, $\vee_B$.

Алгебри істиннісних значень ATV_{AnU}, ATV_{TAnU}, $ATV_{nU=A}$, $ATV_{TnU=A}$, ATV_{RAU}, ATV_{UAU}, ATV_R індукують чисті першопорядкові предикатні алгебри $AQAnU_{V\text{–}A}$, $AQTAnU_{V\text{–}A}$, $AQnU{=}A_{V\text{–}A}$, $AQTnU{=}A_{V\text{–}A}$, $AQRAU_{V\text{–}A}$, $AQUAU_{V\text{–}A}$, $AQR_{V\text{–}A}$ зазначених у їх назві класів *GND*-предикатів; вони також індукують відповідні предикатні алгебри пропозиційного та реномінативного рівнів.

Будемо писати $\boldsymbol{A} \prec \boldsymbol{B}$, якщо алгебра $\boldsymbol{A}$ є підалгеброю алгебри $\boldsymbol{B}$.

Те, що алгебри $\boldsymbol{A}$ та $\boldsymbol{B}$ ізоморфні, будемо позначати $\boldsymbol{A} \sim_{iz} B$.

Опишемо відношення між виділеними алгебрами істиннісних значень.

Теорема 4.

1. $ATV_{6_1}, ATV_{6_2} \prec ATV_7$;
   також маємо $ATV_{AnU} \sim_{iz} ATV_{6_1}$;
2. $ATV_{5_1}, ATV_{5_2} \prec ATV_{6_1}$;
   $ATV_{5_2} \prec ATV_{6_2}$; $ATV_{5_3} \prec ATV_7$;
   також маємо $ATV_{5_1} \sim_{iz} ATV_{5_2}$;
   $ATV_{TAnU} \sim_{iz} ATV_{5_1}$;
   При цьому алгебра ATV_{RAU} неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3} та ATV_{TAnU};
3. $ATV_{4_1} \prec ATV_{5_1}, ATV_{5_2}$;
   $ATV_{4_2}, ATV_{4_3} \prec ATV_{6_2}$;
   $ATV_{4_4} \prec ATV_{6_1}$; $ATV_{4_3}, ATV_{4_4} \prec ATV_{5_3}$;
   також маємо
   $ATV_R \sim_{iz} ATV_{nU=A} \sim_{iz} ATV_{UAU} \sim_{iz} ATV_{4_4}$;
4. $ATV_{3_1} \prec ATV_{5_1}$; $ATV_{3_2}, ATV_{3_3} \prec ATV_{4_2}$;
   $ATV_{3_1} \prec ATV_{5_1}$; $ATV_{3_2}, ATV_{3_3} \prec ATV_{4_2}$;
   $ATV_{3_1} \prec ATV_{5_1}$; $ATV_{3_2}, ATV_{3_3} \prec ATV_{4_2}$;
   $ATV_{3_3}, ATV_{3_4} \prec ATV_{5_2}$;
   $ATV_{3_4} \prec ATV_{4_3}, ATV_{4_4}$;
   $ATV_{3_5} \prec ATV_{5_1}, ATV_{4_4}$;
   при цьому $ATV_{3_1} \sim_{iz} ATV_{3_2} \sim_{iz} ATV_{3_3} \sim_{iz}$ $\sim_{iz} ATV_{3_4} \sim_{iz} ATV_{3_5} \sim_{iz} ATV_{TnU=A}$;
5. $ATV_{2_1} \prec ATV_{3_1}, ATV_{3_2}, ATV_{3_3}, ATV_{4_1}$;
   $ATV_{2_2} \prec ATV_{3_4}, ATV_{3_5}, ATV_{4_1}$;
   $ATV_{2_3} \prec ATV_{4_2}, ATV_{4_3}$;
   при цьому $ATV_{2_1} \sim_{iz} ATV_{2_2}$;
6. $ATV_{1_1} \prec ATV_{3_1}, ATV_{3_5}$;
   $ATV_{1_2} \prec ATV_{2_3}, ATV_{3_2}$;
   $ATV_{1_3} \prec ATV_{2_3}, ATV_{3_3}, ATV_{3_4}$;
   при цьому $ATV_{1_1} \sim_{iz} ATV_{1_2} \sim_{iz} ATV_{1_3}$.

Зазначені алгебри істиннісних значень індукують відповідні композиційні алгебри *GND*-предикатів пропозиційного, реномінативного, першопорядкового рівнів. Ці алгебри *GND*-предикатів перебувають у таких же відношеннях.

Для чистих першопорядкових алгебр маємо (тут опущено індекс $_{V\text{–}A}$):

Теорема 5.

1. $AQAU$, $AQTG \prec AQG$;
   також $AQAnU \sim_{iz} AQAU$;
2. $AQSG, AQTAU \prec AQAU$;
   $AQTAU \prec AQTG$; $AQImG \prec AQG$;
   також маємо $AQSG \sim_{iz} AQTAU$;
   $AQTAnU \sim_{iz} AQSG$;
   алгебра $AQRAU$ неізоморфна алгебрам $AQSG, AQTAU, AQImG, AQTAnU$;
3. $AQTSG \prec AQSG, AQTAU$;
   $AQUA, AQTImG \prec AQTG$;
   $AQTIG \prec AQAU$;
   $AQTIG, AQTImG \prec AQImG$; також
   $AQTIG \sim_{iz} AQR \sim_{iz} AQnU_{=}A \sim_{iz} AQUAU$;
4. $AQP \prec AQSG$; $AQT, AQU_{=}A \prec AQUA$;
   $AQTTIG, AQU_{=}A \prec AQTAU$;
   $AQTTIG \prec AQTImG, AQTIG$;
   $AQSTIG \prec AQSG, AQTIG$;
   при цьому $AQP \sim_{iz} AQT \sim_{iz} AQU_{=}A \sim_{iz}$
   $\sim_{iz} AQTTIG \sim_{iz} AQSTIG \sim_{iz} AQTnU_{=}A$;
5. $AQTS \prec AQP, AQT, AQU_{=}A, AQTSG$;
   $AQTSTIG \prec AQTTIG, AQSTIG, AQTSG$;
   $AQTAmG \prec AQTUA, AQTImG$;
   при цьому $AQTS \sim_{iz} AQTSTIG$;
6. $AQ\perp \prec AQP, AQSTIG$;
   $AQ\Upsilon \prec AQTAmG, AQT$;
   $AQ\Upsilon\perp \prec AQTAmG, AQTU_{=}AG, AQTTIG$;
   при цьому $AQ\perp \sim_{iz} AQ\Upsilon \sim_{iz} AQ\Upsilon\perp$.

У [13] описана оригінальна 5-значна логіка *EU*. Множиною її істиннісних значень є TV_{EU} = {*T*, *F*, u, e, eu}; при цьому u трактується як ↑, проте трактування e та eu дещо відмінне від їх трактування як *TF* та *TF*↑ в алгебрі ATV_7. Водночас для уніфікації позначень множиною істиннісних значень логіки *EU* будемо вважати

TV_{D5} = {*T*, *F*, ↑, *TF*, *TF*↑}.

Логічна зв'язка $\neg_{eu}$ логіки *EU* цілком ідентична логічній зв'язці $\neg_*$.

Для зв'язки $\vee_{eu}$ маємо

$TF{\uparrow} \vee_{eu} {\uparrow} = TF \vee_{eu} {\uparrow} = TF{\uparrow}$,

Це дає порушення умови *TFC*:
$F(TF{\uparrow} \vee_{eu} {\uparrow}) = F(TF{\uparrow}) \cap F({\uparrow}) = \varnothing \neq F(TF{\uparrow})$;
$F(TF \vee_{eu} {\uparrow}) = F(TF) \cap F({\uparrow}) = \varnothing \neq F(TF{\uparrow})$.

Через порушення умови *TFC* алгебра істиннісних значень *AEU* не індукує для *GND*-предикатів композиційну алгебру із коректними ∨ та &.

Алгебра *AEU* неізоморфна алгебрам ATV_{5_1}, ATV_{5_2}, ATV_{5_3}, ATV_{AnU}, ATV_{RAU}.

Ґенерування логіки *TD*7-предикатів із сильної 3-значної логіки Кліні

7-значну логіку *TD*7-предикатів можна отримати із сильної 3-значної логіки Кліні, використовуючи конструкцію повного образу (опис такої конструкції див. [14]). Повний образ дає змогу 1-арні та 2-арні операції (однозначні функції) на певній множині *D* природним чином поширити на булеан цієї множини.

Нехай *f* – 1-арна функція на *D*, а *g* – 2-арна функція на *D*. Нехай $X, Y \subseteq D$.

Тотальні функції 1-арна [*f*] та 2-арна [*g*] на булеані 2^D задаються так:

$[f](X) = \{z \mid z = f(x)$ для деякого $x \in X\}$.

$[g](X, Y) = \{z \mid z = g(x, y)$ для деяких $x \in X, y \in Y\}$.

Так задані [*f*] та [*g*] зберігають ∅:

$[f](\varnothing) = \varnothing$;

$[g](\varnothing, Y) = [g](X, \varnothing) = \varnothing$.

У [14] показано, як 1-арна операція ¬ та 2-арні операції ∨ і &, задані на множині {*T*, *F*} – носії алгебри істиннісних значень класичної пропозиційної логіки *AP* = ({*T*, *F*}, {¬, ∨, &}) – поширюються на її булеан *PB* = {∅, {*T*}, {*F*}, {*T*, *F*}}:

Це дає 4-елементну алгебру

APB = (*PB*, {[¬], [∨], [&]}).

Алгебра істиннісних значень сильної 3-значної логіки Кліні має вигляд $AK = (\{T, F, u\}, \{\neg_K, \vee_K, \&_K\})$. Операції $\neg_K, \vee_K, \&_K$ на носії {*T*, *F*, *u*} задаються так:

P	*T*	*F*	*u*
$\neg_K P$	*F*	*T*	*u*

$\vee_K$	*T*	*F*	*u*
T	*T*	*T*	*T*
F	*T*	*F*	*u*
u	*T*	*u*	*u*

$\&_K$	T	F	u
T	T	F	u
F	F	F	F
u	u	F	u

Задаємо відображення $\varphi : K \to PB$ таким чином (див. [14]):

$\varphi(T) = \{T\}$, $\varphi(F) = \{F\}$,
$\varphi(u) = \{T, F\}$.

Таке φ є гомоморфізмом алгебри AK істиннісних значень сильної 3-значної логіки Кліні в алгебру APB, тобто φ є вкладенням AK в APB.

Отже, алгебру Кліні AK можна отримати із класичної пропозиційної алгебри AP поширенням її операцій на булеан носія за допомогою повного образу.

Покажемо, що пропозиційну алгебру істиннісних значень $TD7$-предикатів ATV_{7E} = $(\{T,\ F,\ T\uparrow,\ F\uparrow,\ \uparrow,\ TF,\ TF\uparrow\},\ \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$ розширеної сигнатури $\{\neg_*, \vee_*, \&_*\}$ теж можна отримати із алгебри Кліні $AK = (\{T, F, u\}, \{\neg_K, \vee_K, \&_K\})$ шляхом поширення її операцій на булеан носія за допомогою конструкції повного образу.

На булеан множини $K = \{T, F, u\}$ – множину $KB = \{\varnothing, \{T\}, \{F\}, \{u\}, \{T, F\}, \{T, u\}, \{F, u\}, \{T, F, u\}\}$ – операції $\vee_K$, $\&_K$, $\neg_K$ поширимо так.

$[\vee_K]$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$	$\{T\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{u\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{u\}$	$\{u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$	$\{u\}$	$\{T,u\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{T,u\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,u\}$
$\{F,u\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F,u\}$	$\{u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{T,F,u\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,F,u\}$

$[\&_K]$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$\{T\}$	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{F\}$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$	$\{F\}$
$\{u\}$	$\varnothing$	$\{u\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{F,u\}$	$\{u\}$	$\{F,u\}$	$\{F,u\}$
$\{T,F\}$	$\varnothing$	$\{T,F\}$	$\{F\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,F,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{T,u\}$	$\varnothing$	$\{T,u\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$\{F,u\}$	$\varnothing$	$\{F,u\}$	$\{F\}$	$\{F,u\}$	$\{F,u\}$	$\{F,u\}$	$\{F,u\}$	$\{F,u\}$
$\{T,F,u\}$	$\varnothing$	$\{T,F,u\}$	$\{F\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{T,F,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$

P	$\varnothing$	$\{T\}$	$\{F\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{T,u\}$	$\{F,u\}$	$\{T,F,u\}$
$[\neg_K](P)$	$\varnothing$	$\{F\}$	$\{T\}$	$\{u\}$	$\{T,F\}$	$\{F,u\}$	$\{T,u\}$	$\{T,F,u\}$

Отримуємо алгебру

$AKB = (KB, \{[\neg_K], [\vee_K], [\&_K]\})$.

Задамо відображення $\varphi : TV_7 \to KB$, де $TV_7 = \{T, F, T\uparrow, F\uparrow, \uparrow, TF, TF\uparrow\}$ – множина істиннісних значень логіки *TD*7-предикатів, таким чином:

$\varphi(T) = \{T\}$, $\varphi(F) = \{F\}$, $\varphi(T\uparrow) = \{T, u\}$,
$\varphi(F\uparrow) = \{F, u\}$, $\varphi(\uparrow) = \{u\}$,
$\varphi(TF) = \{T, F\}$, $\varphi(TF\uparrow) = \{T, F, u\}$.

Отримуємо наведені вище таблиці істинності для композицій $\neg_*, \vee_*, \&_*$!

Теорема 6.

Відображення φ є гомоморфізмом алгебри істиннісних значень *TD*7-предикатів $ATV_{7E} = (TV_7, \{\neg_*, \vee_*, \&_*\})$ в алгебру $AKB = (KB, \{[\neg_K], [\vee_K], [\&_K]\})$.

Інакше кажучи, φ є вкладенням алгебри ATV_{7E} в алгебру *AKB*.

Ми показали, що 7-значну логіку *TD*7-предикатів можна отримати із сильної 3-значної логіки Кліні за допомогою конструкції повного образу шляхом поширення її логічних зв'язок $\neg_K, \vee_K, \&_K$ на булеан множини її істиннісних значень.

Отриманий результат засвідчує *особливе місце* логіки *TD*7-предикатів серед 7-значних логік. З одного боку, вона індукується 2-значною логікою загальних недетермінованих предикатів, а з іншого боку, вона отримується за допомогою конструкції повного образу із сильної 3-значної логіки Кліні, яка посідає (див. [2]) особливе місце серед 3-значних логік.

Два різні шляхи привели до одного і того ж різновиду 7-значних логік – до логіки *TD*7-предикатів!

Висновки

У роботі досліджено новий клас програмно-орієнтованих логічних формалізмів – логіки загальних недетермінованих предикатів, або *GND*-предикатів. Акцент зроблено на вивченні зв'язку логік *GND*-предикатів та логік *7*-значних тотальних детермінованих предикатів, або *TD*7-предикатів. Виділено низку різновидів *GND*-предикатів, описано їх композиційні алгебри. Виділено 7-елементну алгебру істиннісних значень *TD*7-предикатів, описано усі її підалгебри. Досліджено індукування алгебрами істиннісних значень відповідних алгебр *GND*-предикатів, встановлено співвідношення між такими алгебрами. Це засвідчує особливе місце логіки *TD*7-предикатів серед 7-значних логік. Показано, що логіка *TD*7-предикатів отримується за допомогою конструкції повного образу із сильної 3-значної логіки Кліні. Беручи до уваги особливу роль сильної логіки Кліні серед 3-значних, це підтверджує особливий статус логіки *TD*7-предикатів.

Література

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Нікітченко М.С. Прикладна логіка / М.С. Нікітченко, С.С. Шкільняк. – К.: ВПЦ Київський університет, 2013. – 278 с.
3. Нікітченко М.С. Чисті першопорядкові логіки квазіарних предикатів / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2016. – № 2–3. – С. 73–86.
4. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). Number 2, pp. 263–278.
5. Hähnle, R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. Logic Journal of the IGPL, **13** (2005). P. 415–433.
6. Duzi, M. Do we have to deal with partiality? Miscellanea Logica, **5** (2003). P. 45–76.
7. A. Avron, A. Zamansky. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed. Vol. 16 (2011). Springer Netherlands. P. 227–304.
8. Jones, C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. V. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2006). P. 3–25.
9. Нікітченко М.С. Алгебри загальних недетермінованих предикатів / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2018. – № 1. – С. 5–21.
10. Нікітченко М.С. Логіки загальних недетермінованих предикатів: семантичні аспекти / М.С. Нікітченко, О.С. Шкільняк, С.С. Шкільняк // Пробл. програмування. – 2018. – № 2–3. – С. 31–45.
11. S.C Kleene. Introductions to Metamathematics. – Van Nostrand, Princeton, 1952.
12. N. Belnap, T. Steel. The Logic of Questions and Answers. – New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
13. Нікітченко М.С. Семантичні властивості п'ятизначних логік / М.С. Нікітченко, О.В. Шишацька // Пробл. програмування. – 2018. – № 1. – С. 22–35.

14. Шишацька О.В. Виникнення та інтерпретація тризначних логік Кліні / О.В. Шишацька // Пробл. програмування. – 2010. – № 2–3. – С. 72–79.

References

1. Handbook of Logic in Computer Science / Edited by S. Abramsky, Dov M. Gabbay and T.S.E. Maibaum. – Oxford University Press, Vol. 1–5, 1993–2000.
2. Nikitchenko M.S. Prykladna logika / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak. – K.: VPC Kyivskyi universytet, 2013. – 278 p.
3. Nikitchenko M.S. Chysti pershoporiadkovi logiky kvaziarnyh predykativ / M.S. Nikitchenko, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2016. – № 2–3. – P. 73–86.
4. Mykola S. Nikitchenko and Stepan S. Shkilniak. Algebras and logics of partial quasiary predicates // Algebra and Discrete Mathematics, Volume 23 (2017). Number 2, pp. 263–278.
5. Hähnle, R. Many-valued logic, partiality, and abstraction in formal specification languages. Logic Journal of the IGPL, **13** (2005). P. 415–433.
6. Duzi, M. Do we have to deal with partiality? Miscellanea Logica, **5** (2003). P. 45–76.
7. A. Avron, A. Zamansky. Non-deterministic semantics for logical systems, in Handbook of Philosophical Logic, D.M. Gabbay, F. Guenthner (eds.), 2nd ed. Vol. 16 (2011). Springer Netherlands. P. 227–304.
8. Jones, C. Reasoning about partial functions in the formal development of programs. In: Proceedings of AVoCS'05. V. 145. Elsevier, Electronic Notes in Theoretical Computer Science (2006). P. 3–25.
9. Nikitchenko M.S. Algebry zahalnyh nedeterminovanyh predykativ / M.S. Nikitchenko, O.S. Shkilniak, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2018. – № 1. – P. 5–21.
10. Nikitchenko M.S. Logiky zahalnyh nedeterminovanyh predykativ: semantychni aspekty / M.S. Nikitchenko, O.S. Shkilniak, S.S. Shkilniak // Probl. programuvannia. – 2018. – № 2–3. – P. 31–45.
11. S.C Kleene. Introductions to Metamathematics. – Van Nostrand, Princeton, 1952.
12. N. Belnap, T. Steel. The Logic of Questions and Answers. – New Haven and London: Yale Univ. Press, 1976.
13. Nikitchenko M.S. Semantychni vlastyvosti piatyznacznyh logik / M.S. Nikitchenko, O.V. Shyshatska // Probl. programuvannia. – 2018. – № 1. – P. 22–35.
14. Shyshatska O.V. Vynyknennia ta interpretatsia tryznacznyh logik Klini / O.V. Shyshatska // Probl. programuvannia. – 2010. – № 2–3. – P. 72–79.

RESUME

M. Nikitchenko, O. Shkilniak, S. Shkilniak

7-values logics and logics of general non-deterministic predicates

The formalism of mathematical logic forms the basis of modern information and software systems. For this purpose, the classical predicate logic and the special logic based on it (modal, temporal, program, etc.) are traditionally used. However, classical logic has fundamental limitations; it does not take into account the widespread use of partial nondeterministic mappings over incomplete data in software systems and artificial intelligence systems. Therefore, the problem of constructing new program-oriented logical formalisms is important. In this paper we investigate new classes of such formalisms: logics of general non-deterministic predicates, or *GND*-predicates. These logics reflect such properties of programs as partiality, nondeterminism, unfixed arity.

In the work connections between the logic of *GND*-predicates and the logic of 7-valued total deterministic predicates (*TD*7-predicates) is studied. A number of types of *GND*-predicates are identified, their compositional algebras are described. For *GND*-predicates, the laws of traditional logic, such as the laws of absorption and the laws of distributivity, are not valid. The 7-valued algebra ATV_7 of the truth values of *TD*7-predicates is specified, and all its subalgebras are described. Each such subalgebra induces the algebra of *TD*7-predicates, which further induces the algebra of *GND*-predicates. This confirms the special place of the logic of the *TD*7-predicates among the 7-valued logic. The algebras of truth values associated with certain classes of *GND*-predicates, which are not subalgebras of ATV_7 are considered. The relationship between the identified algebras of truth values and the relation between the corresponding algebras of *GND*-predicates is described. It is shown that the logic of *TD*7-predicates is obtained by constructing of a complete image from the strong 3-valued Kleene logic. The fact that Kleene's strong logic has a special role among 3-valued logics confirm the special status of the logic of the *TD*7-predicates.

Надійшла до редакції 01.10.2018